数理解析研究所講究録
79巻 1969年 33-43

Slice algebra について

山形大理 富山 淳

A, B を Banach 代数とし、A, B の α-ノルムによるテンソル積を $A\otimes_\alpha B$ とかく。今 α が Schatten の意味での λ-ノルムより小さくないとき $\varphi \in A^*$ について $A\otimes_\alpha B$ から B への線型な連続対応 R_φ を

$$R_\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i\otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^n \langle a_i, \varphi\rangle b_i$$

とつくることが出来る。$\psi \in B^*$ についても同様に対応

$$L_\psi : A\otimes_\alpha B \longrightarrow A$$

が定義出来る。この時 R_φ, L_ψ の定義から等式

$$\langle x, \varphi\otimes\psi\rangle = \langle R_\varphi(x), \psi\rangle = \langle L_\psi(x), \varphi\rangle$$

が $A\otimes_\alpha B$ の任意の元 x について成立する。これをテンソル積についての Fubini 型の定理という。

次に α が更に local property をもつものとし、Banach 代数 A_0, B_0, $A(\subset A_0)$, $B(\subset B_0)$ について $A_0\otimes_\alpha B_0$

$A \otimes_\alpha B$ が又 Banach 代数になっているものとする。

定義. $A_0 \otimes_\alpha B_0$ の Banach 部分代数 S が $A \otimes_\alpha B$ を含み、任意の $\varphi \in A_0^*$, $\psi \in B_0^*$ について $R_\varphi(S) \subset B$, 且つ $L_\psi(S) \subset A$ となるとき、S を $A \otimes_\alpha B$ の Slice algebra という。

補題.1. S を $A \otimes_\alpha B$ の Slice algebra とし、$\varphi \in A^*$, $\psi \in B^*$ をとると $\varphi \otimes \psi$ の S 上への、product functional の形での扩大は一意である。

証明. $\tilde{\varphi}$, $\hat{\varphi}$ を φ の A_0 上への扩大, $\tilde{\psi}$, $\hat{\psi}$ を ψ の B_0 上への扩大とすると、任意の $x \in S$ について

$$\langle x, \tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi} \rangle = \langle R_{\tilde{\varphi}}(x), \tilde{\psi} \rangle = \langle R_{\tilde{\varphi}}(x), \psi \rangle$$
$$= \langle R_{\tilde{\varphi}}(x), \hat{\psi} \rangle = \langle x, \tilde{\varphi} \otimes \hat{\psi} \rangle = \langle L_{\hat{\psi}}(x), \tilde{\varphi} \rangle$$
$$= \langle L_{\hat{\psi}}(x), \hat{\varphi} \rangle = \langle x, \hat{\varphi} \otimes \hat{\psi} \rangle$$

Slice algebra は作用素環のテンソル積にもあらわれ、重要な役割を果すことが予想されるがここでは Function algebra のテンソル積での Slice algebra の意味を、多変数解析函数における Hartogs の定理などを背景に考えてみる。

A, B をコンパクトな空間 X, Y 上における函数環とする。

このときA, Bのλ-ノルムでのテンソル積 $A \hat{\otimes}_\lambda B$ は自然な意味で $C(X) \hat{\otimes}_\lambda C(Y) = C(X \times Y)$ の部分環 として、$X \times Y$ 上の関数環と考えられる。今 $C(X)$ 上の X の点による evaluation からひきおこされた汎関数による対応を R_x, $y \in Y$ によるそれを L_y とかくことにすると容易にわかるように $F(x, y)$ について $R_x(F)$, $L_y(F)$ は関数 F の slice $\{x\} \times Y$ 及び $X \times \{y\}$ への制限関数をあらわしている。従って R_x, L_y は homomorphism である。さて R_x, L_y は R_φ ($\varphi \in C(X)^*$), L_ψ ($\psi \in C(Y)^*$) の中の特別なものであるが、これについて

補題2. $F \in C(X \times Y)$ について次のことは同値である。

(i) 任意の $\varphi \in C(X)^*$, $\psi \in C(Y)^*$ について

$$R_\varphi(F) \in B \quad \text{且つ} \quad L_\psi(F) \in A$$

(ii) 任意の $x \in X$, $y \in Y$ について

$$R_x(F) \in B \quad \text{且つ} \quad L_y(F) \in A$$

(iii) X, Y の dense な集合 Z_1, Z_2 について

$$R_x(F) \in B \quad \text{且つ} \quad L_y(F) \in A$$

証明。(iii)から(i)をみちびく。今ある $\varphi \in C(X)^*$ が存在して $R_\varphi(F) \notin B$とすると、

$$\exists \psi \in C(Y)^* \; ; \; \langle B, \psi \rangle = 0, \; \langle R_\varphi(F), \psi \rangle \neq 0.$$

よって任意の $x \in Z_1$ について

$$L_\psi(F)(x) = \langle R_x(F), \psi \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad L_\psi(F)(x) = 0 \quad \text{for all} \quad x \in X.$$

しかしこれは

$$\langle L_\psi(F), \varphi \rangle = \langle R_\varphi(F), \psi \rangle \neq 0$$

に矛盾する。よって任意のφについて $R_\varphi(F) \in B$。L_ψについても同様である。以上から

定理 1. $T = A \underset{X}{\otimes} B$ については最大の Slice algebra が存在する。

これを $S_T(X \times Y)$ とかくことにする。

証明. $S_T(X \times Y) = \{ F \in C(X \times Y) \mid$ 任意の $x \in X$ $y \in Y$ について $R_x(F) \in B,\ L_y(F) \in A \}$

とおけばよい。

Slice algebra についての基本的な課題は $S_T(X \times Y)$ がいつ T と等しくなるかという話でこれは $X \times Y$ 上での連続関数が各変数について、A, B というクラスに限定された連続性(解析性(?))をもつとき、$A \otimes B$ に入るかという問題であり、Hartogs の定理との関連が生ずる理由もこの辺にある。そしてこれに対応する形の結果を関数環で求めるの(?)がここでの目的であるが、先ず準備として

補題3　$S_T(X\times Y)$ の Silov 境界 $\partial_{S_T(X\times Y)}$ は ∂_T に等しい。従って $\partial_{S_T}=\partial_A\times\partial_B$

証明. $S_T(X\times Y)$ の定義から $\partial_A\times\partial_B$ が境界の一つになることは殆んど明らかだから上のことが成立する。

A, B の maximal ideal の空間を M_A, M_B とし、Gelfand 表現を $f\longrightarrow\hat{f}$ であらわすことにする。今 $\omega\in M_A$ について ω を A 上の汎関数と考え、C(X) への拡大 $\hat{\omega}$ を考える。M_B の元についても同様にとれば

補題4. $(\omega_1,\omega_2)\in M_A\times M_B$ とすると $\hat{\omega}_1\otimes\hat{\omega}_2$ は $S_T(X\times Y)$ 上 multiplicative である。

証明. $F, G\in S_T(X\times Y)$ について

$$R_{\hat{\omega}_1}(FG)(y)=\langle FG,\ \hat{\omega}_1\otimes e_y\rangle=\langle L_y(FG),\ \hat{\omega}_1\rangle$$
$$=\langle L_y(F)L_y(G),\ \omega_1\rangle=\langle L_y(F),\ \omega_1\rangle\langle L_y(G),\ \omega_1\rangle$$
$$=R_{\hat{\omega}_1}(F)(y)R_{\hat{\omega}_1}(G)(y)$$
$$\text{i.e.}\quad R_{\hat{\omega}_1}(FG)=R_{\hat{\omega}_1}(F)R_{\hat{\omega}_1}(F)$$

このことは $L_{\hat{\omega}_2}$ についても同様である。

$$\langle FG,\ \hat{\omega}_1\otimes\hat{\omega}_2\rangle=\langle R_{\hat{\omega}_1}(FG),\ \hat{\omega}_2\rangle$$
$$=\langle R_{\hat{\omega}_1}(F)R_{\hat{\omega}_2}(G),\ \omega_2\rangle=\langle R_{\hat{\omega}_1}(F),\ \omega_2\rangle\langle R_{\hat{\omega}_1}(G),\ \omega_2\rangle$$
$$=\langle F,\ \hat{\omega}_1\otimes\hat{\omega}_2\rangle\langle G,\ \hat{\omega}_1\otimes\hat{\omega}_2\rangle$$

ここで補題1によって $\hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$ は $S_T(X \times Y)$ 上一意にきまるがこの対応 $(\omega_1, \omega_2) \longrightarrow \hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$ は以下に示すように連続になるから、$M_A \times M_B$ は $S_T(X \times Y)$ の極大イデアル空間の部分空間と考えることが出来る。

$M_A \times M_B$ 内で今 $(\omega_1^\alpha, \omega_2^\alpha) \longrightarrow (\omega_1, \omega_2)$ とする。$\{\hat{\omega}_1^\alpha\}$, $\{\hat{\omega}_2^\alpha\}$ を夫々 $C(X)$, $C(Y)$ 上へのノルムを保存した拡大汎関数の集合とすると、共役空間の単位球の弱コムパクト性から、subnet $\{\hat{\omega}_1^{\alpha_\beta}\}$, $\{\hat{\omega}_2^{\alpha_\beta}\}$ が存在して $\hat{\omega}_1^{\alpha_\beta} \longrightarrow \varphi$, $\hat{\omega}_2^{\alpha_\beta} \longrightarrow \psi$ と弱収束する。これから $\varphi|A = \omega_1$, $\psi|B = \omega_2$, 又 $\hat{\omega}_1^{\alpha_\beta} \otimes \hat{\omega}_2^{\alpha_\beta}$ は $\varphi \otimes \psi$ に弱収束するから補題1より $S_T(X \times Y)$ 上では

$$\hat{\omega}_1^{\alpha_\beta} \otimes \hat{\omega}_2^{\alpha_\beta} \longrightarrow \hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$$

以上のことは又 $\{\omega_1^\alpha\}$, $\{\hat{\omega}_2^\alpha\}$ の任意の subnet についても、それを出発点として言えるから結局 $\hat{\omega}_1^\alpha \otimes \hat{\omega}_2^\alpha$ は $S_T(X \times Y)$ 上 $\hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$ に弱収束する。

系. $\widehat{S_T(X \times Y)}|M_A \times M_B = S_{\hat{T}}(M_A \times M_B)$

又 $S_{\hat{T}}(M_A \times M_B)|X \times Y = S_T(X \times Y)$

以下 A, B をその Silov 境界 ∂_A, ∂_B 上で maximal algebra になっているものとする。

補題5. A, B を X, Y 上の函数環と考え、$\partial_A \subsetneqq X$, $\partial_B \subsetneqq Y$ とする。$F \in C(X \times Y)$ について $T[F]$ を F と $T = A \hat{\otimes} B$ とで生成された函数環とすると、$\partial_{T(F)} = \partial_T$ ならば

$$F | \partial_T \in S_T(\partial_T)$$

証明. x_0 を A の Choquet 境界の点とする。$R_{x_0}(F)$ と B とで生成された Y 上の函数環を R とする。$\partial_R = \partial_B$ を示そう。

今 ∂_B が R の境界にならないとすると

$$\exists f \in R \ ; \ \|f\| > \|f\|_{\partial_B}$$

ここで f は $f = R_{x_0}(G)$ $(G \in T[F])$ とかけるものと考えてよい。$C(X) \hat{\otimes} C(Y) = C(X, C(Y))$ という identification で $R_x(G)$ は X 上の連続函数と考えられるから

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists U$ (x_0 の近傍) ; $\|R_x(G) - R_{x_0}(G)\| < \varepsilon$ for $x \in U$.

そこで ε を $\|f\| - \|f\|_{\partial_B}$ より小さくとる。x_0 が Choquet 境界の点であるから

$$\exists g \in A \ ; \ g(x_0) = \|g\| = 1 \text{ 且つ } |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\|G\|} \text{ in } \partial_A \sim U.$$

$$H = G(g \otimes 1) \in T[F] \text{ について}$$

$(x, y) \in \{\partial_A \sim U\} \times \partial_B$ のとき

$$|H(x,y)| = |G(x,y)|\,|g(x)| \leq \|G\| \frac{\varepsilon}{\|G\|} = \varepsilon$$

$(x, y) \in \partial_A \cap U \times \partial_B$ のとき

$$|H(x,y)| \leq |G(x,y)| \leq \|R_x(G)\|_{\partial_B} \leq \|R_{x_0}(G)\|_{\partial_B} + \varepsilon$$

従って $\partial_{T(F)} = \partial_T$ から

$$\|H\| \leq \|R_{x_0}(G)\|_{\partial_B} + \varepsilon = \|f\|_{\partial_B} + \varepsilon < \|f\| = \|R_{x_0}(G)\|$$
$$= \|R_{x_0}(H)\| \leq \|H\|$$

よって ∂_B は R の境界となり $\partial_R = \partial_B$. しかるに B は Y 上では relative maximal algebra になっているから $B = R$ i.e. $R_{x_0}(F) \in B$, 同様に任意の B の choquet 境界の点 y に対して $L_y(F) \in A$。よって補題2から

$$F|\partial_A \times \partial_B \in S_T(\partial_A \times \partial_B)$$

定理2. A, B を X, Y 上の関数環で ∂_A, ∂_B 上では maximal algebra になっているものとする。今 ∂_A, ∂_B が X, Y の proper な部分集合になっているならば、$S_T(X \times Y)$ は relative maximal algebra である.

証明. 関数環 $S \supset S_T(X \times Y)$, $\partial_S = \partial_{S_T(X\times Y)} = \partial_T$ をとり $F \in S$ とすると、$\partial_{T(F)} = \partial_T$. よって $F|\partial_A \times \partial_B$ は $S_T(\partial_A \times \partial_B)$ に入る. しかるに補題4の系から

$$S_T(X \times Y)|\partial_A \times \partial_B = S_T(\partial_A \times \partial_B).$$

よって $F|\partial_A \times \partial_B$ は $S_T(X \times Y)$ の関数に拡大出来るがこれは F 自身にほかならない。

以上の証明からわかるように このとき $S_T(M_A \times M_B)$ は $\partial_A \times M_B \cup M_A \times \partial_B$ を含む任意の閉集合上で relative maximal algebra になることが言える。

A_1 を Disk algebra としたとき、C^n 内の polycylinder D^n 上連続で、内部で解析的な関数全体のつくる代数 A_n は n ケの A_1 とテンソル積と考えられる。よく知られているように Γ を D^n の topological boundary を含む任意の閉集合としたとき $A_n|\Gamma$ は $C(\Gamma)$ の中で relative maximal algebra になるが、これはこのとき $A_n|\Gamma = S_{A_n}(D^n)|\Gamma$ となる事情によるものである。ここで上記の等式が Hartogs の定理の abstract な構成と考えられるがその背景の結果としては次のことが成立する。

Γ を $M_A \times M_B$ 内の閉集合とする。Γ 上で $A \hat{\otimes} B$ の関数で局所的に近似出来る関数を Γ 上 $A \hat{\otimes} B$-holomorphic な関数と呼びその全体を $H_T(\Gamma)$ であらわす。

定理3. A, B を夫々 ∂_A, ∂_B 上で essential な maximal algebra とする。∂_A, ∂_B を M_A, M_B の proper な部分集合とすると $\Gamma = \partial_A \times M_B \cup M_A \times \partial_B$ について

$$H_T(\Gamma) = S_T(M_A \times M_B)|\Gamma$$

証明. $(x_0, y_0) \in \partial_A \times M_B$ をとる。今 x_0 の近傍 U を $\bar{U} \subsetneq \partial_A$ ととると $\overline{A|\bar{U}} = C(\bar{U})$。$V$ を y_0 の任意の近傍とす

3. このとき $F \in S_{\hat{T}}(M_A \times M_B)$ について $F|\mho \times \nabla \in \overline{T|\mho \times \nabla}$ となることを示そう。

$$\overline{T|\overline{\mho} \times \overline{\nabla}} = (\overline{A \hat{\otimes} B|\overline{\mho} \times \overline{\nabla}}) \supset (\overline{A|\overline{\mho}}) \hat{\otimes} (\overline{B|\overline{\nabla}})$$
$$= C(\overline{\mho}) \hat{\otimes} (\overline{B|\overline{\nabla}}) = C(\overline{\mho}, (\overline{B|\overline{\nabla}}))$$

一方 $x \longrightarrow R_x(F) \in B$ は M_A 上の連続関数である。よって以上のことから $F|\overline{\mho} \times \overline{\nabla} \in C(\overline{\mho}, B|\overline{\nabla})$ i.e. $F|\mho \times \nabla \in \overline{T|\mho \times \nabla}$.

$(x_0, y_0) \in M_A \times \partial_B$ の時も同様であるから

$$S_{\hat{T}}(M_A \times M_B)|\Gamma \subset H_T(\Gamma).$$ 次に

$F \in H_T(\Gamma)$ をとると任意の $x \in \partial_A$, $y \in \partial_B$ について

$R_x(F) \in H_B(M_B)$, $L_y(F) \in H_A(M_A)$. よって

$$\sup_{\partial_A \times M_B} |F(x, y)| = \sup_{\partial_A} \sup_{M_B} |R_x(F)(y)| = \sup_{\partial_A} \sup_{\partial_B} |R_x(F)(y)|$$
$$= \sup_{\partial_A \times \partial_B} |F(x, y)|$$

同様に

$$\sup_{M_A \times \partial_B} |F(x, y)| = \sup_{\partial_A \times \partial_B} |F(x, y)|$$

i.e. $\partial_{H_T(\Gamma)} = \partial_T$ 従って $S_{\hat{T}}(M_A \times M_B)|\Gamma = H_T(\Gamma)$

尚 sup の等式の二番目は Rickart [3] の結果。又はもっと強く Glicksberg [2] によって $H_A(M_A) = \hat{A}$, $H_B(M_B) = \hat{B}$ が得られることによる。

註1. 定理3はA, Bに essential という仮定をおかなくとも成立する。

註2. Slice algebra の名は Birtel [1] による。[1]では定理2と3が表現空間(M_A, M_B)が metrizable の時に証明されているが定理ののべ方にも証明にも不正確さや誤りが多い。

文献

1. F. T. Birtel ; Products of maximal function algebras. Tulane大学での Function algebra についての Symposium 報告 (1965)
2. I. Glicksberg ; Maximal algebras and a theorem of Radó, Pacific J. Math., 14 (1964), 919−941
3. C. E. Rickart ; Analytic phenomena in general function algebras, Pacific J. Math. 18 (1966), 361 − 377
4. N. Mochizuki ; The tensor product of function algebras Tôhoku Math. J., 17 (1965), 139 − 146
5. J. Tomiyama ; Tensor products of commutative Banach algebras, Tôhoku Math. J., 12 (1960), 147−154
6. ———— ; Applications of Fubini type theorem to the tensor products of C^*−algebras ; Tôhoku Math. J., 19 (1967), 213 − 226